

УДК 372.851

DOI 10.5281/zenodo.11103956

Кирсанова Л.В.

Кирсанова Лариса Валерьевна, Тихоокеанский государственный университет, Россия, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136, e-mail: lara-shishkina12@mail.ru.

Дидактическое обеспечение систематизации и обобщения по теме «финансовая математика» на этапе подготовки учащихся 11 классов к егэ по математике профильного уровня

Аннотация. В статье рассматривается проблема решения задач финансовой математики в ЕГЭ по математике профильного уровня. Приведен статистико-аналитический анализ решаемости проблемных задач. Рассмотрено предлагаемое дидактическое обеспечение и его краткий анализ. Предложены методические рекомендации для успешного решения задач по финансовой математике. Статья содержит примеры решения экономических задач, которые входят в учебно-методическое пособие, разрабатываемое автором. Материалы исследования могут быть использованы как учителями для организации практических уроков, внеурочных мероприятий и обучения решению экзаменационных задач по математике учащихся 11 классов, так и учениками для подготовки к урокам и ЕГЭ по математике профильного уровня.

Ключевые слова: финансовая математика, экономические задачи, оптимальный выбор, практикум, учебно-методическое пособие, практикум.

Kirsanova L.V.

Kirsanova Larisa Valeryevna, Pacific State University, 136 Pacific Street, Khabarovsk, Russia, e-mail: lara-shishkina12@mail.ru.

Didactical support of systematization and generalization on the topic «financial mathematics» at the stage of preparing 11th grade students for the use in profile-level mathematics

Abstract. The article deals with the problem of solving problems of financial mathematics in the Unified State Exam in mathematics of the profile level. A statistical and analytical analysis of the solvability of problem problems is presented. The proposed didactic provision and its brief analysis are considered. Methodological recommendations for the successful solution of problems in financial mathematics are proposed. The article contains examples of solving economic problems that are included in the educational and methodological manual developed by the author. The research materials can be used both by teachers to organize practical lessons, extracurricular activities and teaching math exam tasks to 11th grade students, and by students to prepare for lessons and USE in mathematics at a specialized level.

Key words: financial mathematics, economic problems, optimal choice, workshop, teaching aid, workshop.

Задача финансовой математики появилась в ЕГЭ профильного уровня с 2015 года. По данным РЦОКО Хабаровского края, в 2015 г. задание выполнили 0,40% экзаменуемых, частично выполнили – 0,19%. Эксперты объяснили этот факт тем, что у учащихся отсутствует умение работать с текстом, формализовывать и выделять основные параметры. В 2016 году задание выполнили 6,49% экзаменуемых, частично выполнили – 4,63%. В 2017 году – 3,93% и 1,76%, в 2018 году – 0,39% и 0,81%, в 2019 году – 6,93% и 1,68% соответственно. В 2020 году динамика следующая: 19,37% выполнивших задание и 5,40% частично выполнивших. В 2021 году 11,79% и 2,61%, в 2022 году – 24,30% и 4,48%, в 2023 году – 5,21% и 2,29% соответственно [6]. Таким образом, существует проблема подготовки выпускника, связанная с решением финансовых задач повышенного уровня сложности.

Для успешного решения задачи финансовой математики на экзамене, а также, для воспитания финансово грамотного общества целесообразно разработать учебно-методическое пособие для подготовки учащихся 11 классов к решению данных задач, практикума и решебника в поддержку пособия. Такое дидактическое обеспечение будет помощником учителям и учащимся образовательных учреждений.

Рассмотрим 3 пособия для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня.

1. «Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности». Авторы: А. В. Семенов, И. В. Яценко, И. Р. Высоцкий, А. С. Трепалин [5]. Задачи по финансовой математике не сопровождаются теоретическим материалом. Решения представлены краткие. Учащимся придется их «расшифровывать», дополняя промежуточными преобразованиями и вычислениями.

2. «Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации». Авторы: А. В. Семенов, А. С. Трепалин, И. В.

Яценко [4]. В пункте «Экономические задачи» дается небольшой набор задач с экономическим содержанием, которые дают лишь представление о заданиях повышенного уровня сложности с развернутым ответом.

3. «Математика. Решение задач экономического содержания профильного уровня ЕГЭ». Автор: Кузин Г. А. [2]. В решениях к типовым задачам из профильного ЕГЭ по математике использованы, на наш взгляд, неудачные обозначения, из-за которых получаются громоздкие решения. Также нет подробных объяснений к ним, оформление задач не структурировано.

Рассмотрев данные пособия, следует сделать вывод о том, что учащимся требуется дидактическое обеспечение для тщательной подготовки к решению задач финансовой математики, задания, которые натолкнут на дальнейшее решение, а также, содержащие решения с разными видами оформления для выбора наиболее удобного для каждого из учащихся.

Задачи финансовой математики в ЕГЭ профильного уровня делятся на две группы: экономические задачи и задачи на оптимальный выбор.

Экономические задачи, в свою очередь, делятся на задачи про кредиты и вклады. Также, задачи на кредиты бывают с дифференцированными платежами (разными), аннуитетными платежами (равными) или равномерно уменьшающимися платежами. Данные группы делятся по вопросу [1, с. 185]:

- Поиск суммы взятой в кредит;
- Поиск размера платежа или суммы платежей по кредиту;
- Поиск процентной ставки;
- Поиск срока оплаты кредита.

Задачи на оптимальный выбор содержат следующие подтипы (сюжеты):

- Ценные бумаги;
- Пенсионный фонд;
- Владелец завода;
- Области;
- Шахты;
- Комбинаты;

– Прибыль.

Текстовая задача с экономическим содержанием – относительно новый вид заданий, появившихся в КИМ ЕГЭ профильного уровня, хотя задачи «на проценты» в вариантах вступительных экзаменов в ВУЗы встречались и раньше достаточно часто, особенно если речь шла об экономических специальностях.

Решение таких задач связано со знанием некоторых специфических математических моделей из области экономики, умением переводить сформулированные в виде текста условия в уравнения и неравенства и пониманием того, как решения полученных уравнений и неравенств соотносятся с тем, что написано в условии задачи, то есть какой смысл имеют полученные результаты.

Прежде всего стоит вспомнить основные правила решения текстовых задач (они пригодятся и для решения более простой текстовой задачи варианта КИМ).

Решение любой текстовой задачи складывается из нескольких основных моментов:

- Чтение условия задачи, объяснение сути описанного в задаче процесса;

- Выбор переменных: для каждого типа задач существуют рекомендации, какие величины лучше всего обозначать как переменные (и это не всегда те величины, о которых идет речь в вопросе задачи); переменных при решении текстовой задачи нужно вводить столько, сколько их нужно для того, чтобы просто и логично составить уравнения и неравенства;

- Составление уравнений и неравенств, формализация того, что необходимо найти в процессе решения задачи: при составлении уравнений обращать внимание на единицы измерения – они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин;

- Решение полученного уравнения, неравенства или системы;

- Исследование полученного результата и нахождение ответа на вопрос задачи [3, с. 4].

Рекомендуемый порядок изучения тем:

- Вычисление «простых» процентов;
- Освоение формулы «сложных процентов» и ее применению в задачах с экономическим содержанием;

- Решение задач на банковские вклады;

- Решение задач на банковские кредиты (ознакомиться с двумя математическими моделями, рассмотреть их на простом жизненном примере).

В основе этих схем лежит уже известная нам формула «сложных» процентов, а также свойства арифметической и геометрической прогрессий. Поэтому, прежде чем начинать знакомиться с «кредитной» математикой, необходимо повторить некоторые свойства уже упомянутых прогрессий. При решении задач, в которых речь идет о выплате кредита в соответствии с дифференцированной или аннуитетной схемой, можно действовать двумя способами: либо использовать готовые формулы, полученные в ходе построения соответствующей математической модели, либо вычислять размер очередного платежа пошагово. Выбор способа зависит от условия задачи.

К наиболее сложным задачам с экономическим содержанием относятся так называемые «задачи на оптимальный выбор» или экстремальные задачи. Эти задачи описывают разнообразные ситуации, с которыми граждане, предприятия и компании могут встретиться в своей экономической деятельности. К решению таких задач есть несколько подходов, из которых наиболее часто используются метод перебора вариантов и логичных рассуждений, исследование функций элементарными методами и с помощью производной [3, с. 4].

Как правило, при решении данных задач необходимо либо провести непосредственные вычисления и сравнить их

результаты, либо составить уравнение (систему уравнений) и решить его (ее) с учетом некоторых дополнительных условий (например, в целых числах), либо построить функцию, устанавливающую связь между двумя экономическими величинами (например, между объемом производства и прибылью компании) и исследовать ее на экстремальное значение с помощью производной, опять же с учетом того, что данная функция описывает некий реальный процесс, от чего могут зависеть какие-то ограничения на область определения или область значений.

Разрабатываемое автором учебно-методическое пособие разделено на две главы: экономические задачи и задачи на оптимальный выбор. В начале каждой главы содержится необходимая теоретическая база, затем примеры подробных решений задач с оформлением и в конце глав – задачи для самостоятельной работы. В конце есть ответы к каждой задаче, но, если потребуется полное оформленное решение, его можно найти в решебнике.

Дано:

S – сумма кредита

$$p = 11\% = \frac{11}{100}$$

$n = 2$ года

$$c_1 = c_2 = 3696300 \text{ руб.} = x$$

$S = ?$

$$= \left(\frac{111}{100}\right)^2 S - \frac{111}{100} x - \text{долг перед 2-ым платежом}$$

$$\left(\frac{111}{100}\right)^2 S - \frac{111}{100} x - x = 0 - \text{долг после 2-го платежа}$$

II. Вычисления

$$\left(\frac{111}{100}\right)^2 S - \frac{111}{100} x - x = 0 \Rightarrow \left(\frac{111}{100}\right)^2 S - \frac{211}{100} x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{211x \cdot 100 \cdot 100}{100 \cdot 111 \cdot 111} \Rightarrow S = \frac{211x \cdot 100}{111 \cdot 111} \Rightarrow S = \frac{211 \cdot 3696300 \cdot 100}{111 \cdot 111} = 6330000.$$

Таким образом, Василий взял в банке 6330000 рублей.

Ответ: 6330000 рублей.

2. В июле 2017 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

– Каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом преды-

дущего года;
– С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– В июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии

Также предлагается практикум для удобного оформления своих решений. Практикум содержит те же задачи из учебно-методического пособия, но после каждой решенной задачи предлагается решить аналогичную. На странице для решения указано условие задачи, место для ее решения, справа пустая колонка для вычислений в столбик и в конце заметки для учителя или учащегося (если материал изучается самостоятельно).

Несколько примеров задач из учебно-методического пособия. Условия задач взяты из открытого банка заданий ФИПИ [7]:

1. 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму в кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11%), затем Василий переводит в банк 3696300 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение:

I. Строим модель

$$1) S + \frac{11}{100} S = \frac{111}{100} S - \text{долг перед 1-ым платежом}$$

$$\frac{111}{100} S - x - \text{долг после 1-го платежа}$$

$$2) \left(\frac{111}{100} S - x\right) + \frac{11}{100} \left(\frac{111}{100} S - x\right) = \frac{111}{100} \left(\frac{111}{100} S - x\right) =$$

со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 2 млн рублей.

Дано:

S – ? млн руб., $S \in \mathbb{Z}$

$$p = 25\% = \frac{1}{4}$$

$n = 3$ года

c_1, c_2, c_3 – платежи

$$c_{max} - c_{min} < 2 \text{ млн руб.}$$

S_{min} – ?

Решение:

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	июль	S	
	январь	$1,25S$	
	март	$1,25S - c_1 = 0,7S$	$0,55S$
2	июль	$0,7S$	
	январь	$1,25 \cdot 0,7S = 0,875S$	
	март	$0,875S - c_2 = 0,4S$	$0,475S$
3	июль	$0,4S$	
	январь	$1,25 \cdot 0,4S = 0,5S$	
	март	$0,5S - c_3 = 0$	$0,5S$

Из таблицы видно, что $c_{max} = 0,55S$,
 $c_{min} = 0,475S \Rightarrow 0,55S - 0,475S < 2$

II. Вычисления

$$0,55S - 0,475S < 2 \Rightarrow 0,075S < 2 \Rightarrow S < 26\frac{2}{3}$$

Таким образом, при условии, что $S \in \mathbb{Z}$, $S_{min} = 26$ млн руб.

Ответ: 26.

3. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300000 рублей. Условия его возврата таковы:

– Каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причем в первый год будет выплачено 160000 рублей, а во второй год – 240000 рублей.

Дано:

$S = 300000$ руб.

$$p = r\% = \frac{r}{100}$$

$n = 2$ года

$c_1 = 160000$ руб.

$c_2 = 240000$ руб.

r – ?

Решение:

Обозначим $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг
0	июль	S
1	январь	Sk
	март	$Sk - c_1$
2	январь	$k^2S - kc_1$
	март	$k^2S - kc_1 - c_2 = 0$

II. Вычисления

$$k^2S - kc_1 - c_2 = 0 \Rightarrow k^2 \cdot 300000 - k \cdot 160000 - 240000 = 0 \Rightarrow$$

$$k^2 \cdot 15 - k \cdot 8 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{6}{5} \\ k_2 = -\frac{2}{3} - \text{не удовл. усл. (*)} \end{cases}$$

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow r = \frac{100}{5} = 20.$$

Таким образом, долг увеличивается каждый год на 20%.

Ответ: $r = 20$.

В результате исследования можно сделать следующие выводы:

– Предлагаемые материалы для решения задач финансовой математики из ЕГЭ профильного уровня содержат краткие решения задач, что способствует длительному осмыслению решений учащимися; необходимая теория не описывается, нет различных вариантов оформления заданий и решений многих типов задач на оптимальный выбор;

– Отсутствуют подходящие пособия для учителя с подробной методической базой;

– Следует продолжить разработку учебно-методического пособия по теме «Финансовая математика» для учащихся 11 классов и учителей образовательных организаций для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня, а также, практикума и решебника в поддержку данного пособия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бушнева О.Ф., Эзиева А.Д. Анализ задач экономического содержания из открытого банка заданий ЕГЭ 2017 года // Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова, 2017. №1. С. 184-190.
2. Кузин Г.А. Математика. Решение задач экономического содержания профильного уровня ЕГЭ. Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2017. 72 с.
3. Методика обучения решению задач на оптимизацию во второй части ЕГЭ профильного уровня: сборник учебно-методических рекомендаций / сост. Бабинер Е.С. Биробиджан, 2018. 18 с.
4. Семенов А.В., Трепалин И.В., Ященко И.В. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации М.: Интеллект-Центр, 2023. 222 с.
5. Семенов А.В., Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Трепалин А.С. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. М.: Интеллект-Центр, 2023. 193 с.
6. Статистико-аналитические отчеты о результатах ЕГЭ / Региональный центр оценки качества образования (КГКУ РЦОКО). URL: <https://rcoko27.ru> (дата обращения: 05.02.2024).
7. Открытый банк заданий ЕГЭ / Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ). URL: <https://ege.fipi.ru/bank> (дата обращения: 04.03.2024).

REFERENCES (TRANSLITERATED)

1. Bushneva O.F., Jezieva A.D. Analiz zadach jekonomicheskogo sodержanija iz otkrytogo banka zadaniy EGJe 2017 goda // Vestnik Taganrogskego instituta imeni A.P. Chehova, 2017. №1. S. 184-190.
2. Kuzin G.A. Matematika. Reshenie zadach jekonomicheskogo sodержanija profil'nogo urovnja EGJe. Novosibirsk: Novosibirskij gosudarstvennyj tehničeskij universitet, 2017. 72 s.
3. Metodika obuchenija resheniju zadach na optimizaciju vo vtoroj chasti EGJe profil'nogo urovnja: sbornik uchebno-metodičeskikh rekomendacij / sost. Babiner E.S. Birobidzhan, 2018. 18 s.
4. Semenov A.V., Trepalin I.V., Jashhenko I.V. Matematika. Profil'nyj uroven'. Edinyj gosudarstvennyj jekzamen. Gotovimsja k itogovoj attestacii M.: Intellekt-Centr, 2023. 222 s.
5. Semenov A.V., Jashhenko I.V., Vysockij I.R., Trepalin A.S. Matematika. Reshenie zadaniy povyshennogo i vysokogo urovnja slozhnosti. M.: Intellekt-Centr, 2023. 193 s.
6. Statistiko-analitičeskije otchety o rezul'tatah EGJe / Regional'nyj centr ocenki kachestva obrazovanija (KGKU RCOKO). URL: <https://rcoko27.ru> (data obrashhenija: 05.02.2024).

7. Otkrytyj bank zadanij EGJe / Federal'nyj institut pedagogičeskikh izmerenij (FIPI). URL: <https://ege.fipi.ru/bank> (data obrashhenija: 04.03.2024).