

УДК 781.42
DOI 10.5281/zenodo.14050905

Иванова Е.В.

Иванова Екатерина Владимировна, кандидат искусствоведения, доцент, Московская государственная консерватория имени П.И. Чайковского, Россия, 125009, Москва, ул. Большая Никитская, д. 13/6. E-mail: ca-non2008@yandex.ru.

Занимательные аспекты математики в истории музыкального контрапункта

Аннотация. В статье представлены некоторые аспекты проявления математического начала в искусстве музыкального контрапункта на примере сочинений эпохи Возрождения и XX века. Отмечены в целом исторически важные особенности развития контрапунктического искусства, связанные с математическими атрибутами (интервальные и ритмические взаимоотношения голосов по вертикали). Среди наиболее изощренных по мастерству извлечения максимально возможных вариантов из исходной мелодии отмечается вид полиморфного канона, давший в исторической перспективе импульс к своим разновидностям в творчестве разных композиторов XX столетия (здесь упоминается канон Шёнберга). На нескольких примерах так называемого типа стержневого канона в полифонической музыке Ренессанса описывается явление симультанного сложного контрапункта, предполагающего одновременное наличие нескольких пар двухголосия, по-разному сочетающихся между собой (что побуждает исследователей рассматривать эти случаи математически в разных комбинациях по вертикали и горизонтали). Подчеркивается особая роль рационально-интеллектуального определения математики в композиционном процессе, ее взаимодополняющая функция по отношению к художественной стороне творчества.

Ключевые слова: математика, контрапункт, рациональное начало, полиморфный канон, интервальная логика, комбинаторика, серийный ряд, сложный контрапункт.

Ivanova E.V.

Ivanova Ekaterina Vladimirovna, Candidate of Art History, Associate Professor, Moscow State Tchaikovsky Conservatory, Russia, 125009, Moscow, Bolshaya Nikitskaya str., 13/6. E-mail: ca-non2008@yandex.ru.

Entertaining aspects of mathematics in the history of musical counterpoint

Abstract. The article presents some aspects of the manifestation of the mathematical principle in the art of musical counterpoint on the example of works of the Renaissance and the twentieth century. In general, historically important features of the development of contrapuntal art related to mathematical attributes (interval and rhythmic relationships of voices vertically) are noted. Among the most sophisticated in the skill of extracting the maximum possible variants from the original melody, a kind of polymorphic canon is noted, which gave an impulse to its varieties in the works of various composers of the twentieth century in a historical perspective (the Schoenberg canon is mentioned here). Several examples of the so-called core canon type in Renaissance

polyphonic music describe the phenomenon of simultaneous complex counterpoint, suggesting the simultaneous presence of several pairs of two-voices, combined in different ways (which encourages researchers to consider these cases mathematically in different combinations vertically and horizontally). As the general purpose of the article, the special role of the rational-intellectual definition of mathematics in the compositional process is emphasized, its complementary function in relation to the artistic side of creativity.

Key words: mathematics, counterpoint, rational principle, polymorphic canon, interval logic, combinatorics, serial series, complex counterpoint.

Взаимодействие рационально-интеллектуального (в частности, математического) и художественного начал в музыкальном искусстве имеет глубокие исторические корни. Это, прежде всего, античное и средневековое учение о музыкально-математическом устройстве космоса (гармонии сфер), характерное для пифагорейской и платонической философских традиций. Оно получило мощный исторический резонанс, отразившись в произведениях не только музыкального искусства, но и в поэзии, живописи.

В период Нового времени концепция «музыки сфер» была развита Иоганном Кеплером в его трактате «Гармония мира» (1619), где каждой планете у него соответствовала своя мелодия и особая роль отводилась числовым отношениям, лежащим в основе музыкальных интервалов.

Известные учёные прошлого и настоящего неоднократно отмечают ту особенность, что музыка содержит в себе арифметическое зерно, которое находится во взаимодействии с духовной деятельностью. Существует немало авторитетных дискуссий, связанных со смыслом, вложенным в высказывание Лейбница "Musica est exercitium *arithmeticae occultum nescientis se numerate animi*", некоторые из которых во многом обусловлены истолкованиями его перевода. Например, в учебном пособии «Философия и музыка» 1975 года [5, с. 57] содержится, на мой взгляд, достойный вариант перевода фразы Лейбница о взаимопроникновенном соединении математического и духовного начал: «Музыка есть не что иное, как арифметика, но скрытая, так что душа не знает, что она считает».

Изучение закономерностей контрапунктического взаимодействия музыкальных голосов также имеет многовековую историю, отразившуюся в авторитетных трактатах Иоанна де Гарландия, Франко Кёльнского, Тинкториса, Царлино, Коклико [1; 3; 4; 6; 7; 9] и многих других. Роль чисто математических процессов в этом направлении весьма значительна в связи с постепенным, исторически обусловленным в своем развитии, усилением качества вертикальной составляющей многоголосия. А именно, интервального соотношения мелодий.

Можно утверждать, что интервальная логика долгое время была предметом особой заботы при создании музыкальной композиции, следуя художественно-эстетическим нормам своего времени. Например, в эпоху Средневековья существовал свой «стержень» вертикали в виде триады совершенных консонансов (первых интервалов обертонового звукоряда) – октавы, квинты и кварты. В последующий этап – эпоху Возрождения – выработка и следование нормам вертикальных соотношений голосов стало важнейшей задачей композиторского цеха.

Следовательно, в профессиональной музыкальной среде вырабатывались критерии, включавшие помимо художественных, выразительных задач чисто рациональные (в том числе арифметические) закономерности. Так, координация интервального соотношения пар голосов по вертикали подчинялась и метроритмическим нормам, выработанным, в частности, у музыкантов Ренессанса.

Помимо заботы об интервальной координации голосов роль математического начала в контрапункте проявилась и в

русле комбинаторики. На основе рукописных нотированных источников известно, что в Средневековье формы простейших комбинаций при перемещении голосов по типу взаимнообмена (Stimm-tausch, или перестановка голосов в форме ронделя) еще не предполагали иных, помимо исходных, высотных соотношений между мелодиями. Однако в последующий исторический период этот параметр начинает обогащаться разнообразными вертикальными и горизонтальными производными, что, в частности, в отечественном музыкознании впоследствии нашло отражение в глобальном труде С.И. Танеева «Подвижной контрапункт строгого письма» (первое издание в 1909 году).

Примечательно, что изрядные ресурсы при выведении голосов на основе исходного (пропосты) были осознаны за счет развития области загадочных канон нидерландскими мастерами Ренес-

санса. И даже позднее появилась особая разновидность полиморфного канона, примеры которого можно, например, найти в трактате английского музыковеда XIX века Эбенезера Праута «Двойной контрапункт и Канон» [8]. Автор упоминает канон этого вида у итальянского композитора раннего Барокко Дж. Валентини, описанный Марпургом (видимо, в трактате о фуге) как образец, предполагающий 2000 разных способов полиморфной обработки исходной мелодии (пропосты канона). Однако для иллюстрации данного вида канона Праут выбирает другой, по его словам [8, с. 249], «самый знаменитый и наиболее известный пример такого рода» – канон Г. Штёльцеля, «написанный им с целью опровергнуть утверждение <...> о том, что возможности канона были исчерпаны» (перевод с англ. выполнен мной – Ивановой Е.В.) – Рис. 1.



Рис. 1. Канон Штёльцеля в его первоначальной форме (четырёхголосный бесконечный канон второго разряда)

Описанный Праутом далее в его работе полиморфный метод работы с исходным материалом заключается в образовании новых вариантов канона за счёт работы с самой его семитактовой мелодией. Для начала можно получить из неё 14 новых форм, если изменять её за счёт начала мелодии с первой или третьей доли каждого такта. Затем следуя принципу per arsin et thesin (смещая начало мелодии

с первой доли на третью в данном четырёхдольном метре) найдём ещё 14 форм канона применительно к найденным ранее 14 мелодиям пропосты. Из других преобразований далее обнаруживаются новые при использовании инверсии, ракохода с ритмико-мелодическими изменениями, путем изменения расстояния вступления между голосами, наконец, при помощи принципа циркулярного

(кругового) канона с движением его по квинтовому кругу.

В XX веке этот вид канона получил интерпретацию в творчестве Арнольда Шёнберга. Среди его безопусных канонов он обособлен под названием «Вдвойне зеркальный и канон в ключах по правилам нидерландского искусства» [2, с. 14-15]. Сочетание в одновременности нескольких видов преобразования одной и той же мелодии является в нем не единственным увлекательным аспектом построения канона. Математическая точность проявляется здесь в симметричном устройстве формы целого – канон выполнен по правилу ракоходно-инверсионного отражения материала первой части во второй, что дает полное тождество материала, если читать его не сверху вниз, а в перевернутом виде.

Как видим, роль математических процессов в построении таких композиций неотъемлемая составляющая всего акта творчества. Интеллектуализм, как категория с включением разного вида ло-

гических операций (в т.ч. и математических), становится неотъемлемым свойством композиции серийной музыки Антона Веберна. Следует подчеркнуть, что он обладал особой манерой изящества и филигранным мастерством в выборе «строительного» материала для каждого сочинения.

Так, интервальный состав серийного ряда конструировался композитором с поразительной скрупулёзностью, сравнимой с таковой у специалистов иных профессиональных сфер деятельности (например, программиста, хирурга, ювелира и т.п.). Зачастую его цифровое выражение представляло собой головоломку-шараду, решение и постижение которой могло доставить немалое эстетическое удовольствие.

Например, на Рис. 2 приводится серийный ряд «Концерта для девяти инструментов» ор. 24 Веберна, четыре трехзвуковых сегмента которого группируются попарно с зеркальными интервальными отражениями:

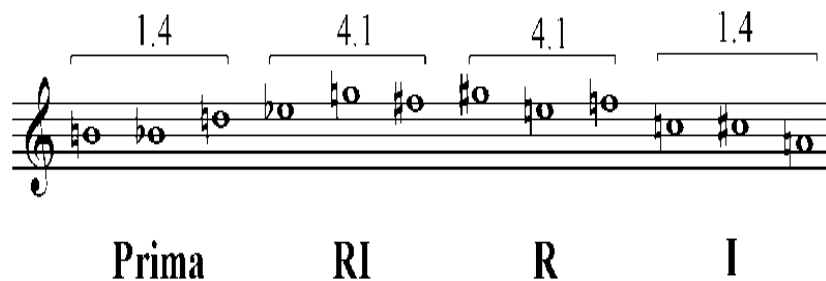


Рис. 2. А. Веберн. Концерт для девяти инструментов ор.24. Серийный ряд (графически обозначены четырех сегмента по три звука в каждом, цифрами выражено интервальное строение каждого сегмента в полутонах)

Занимательными математическими операциями при анализе контрапунктических норм вертикали можно назвать и вычисления индексов производных соединений (по теории С.И.Танеева). Примечательно, что эта область становится интересной не сразу с момента её, ещё теоретически не осмысленного, появления (в сочинениях средневековых авторов), а со временем – то есть в связи с развитием ладового мышления. В эпоху

Возрождения встречаемся уже с интересными случаями симультанных (термин Н.А.Симаковой) форм контрапункта в композициях с техникой канонической имитации.

Наличие так называемого стержневого канона хотя бы в двух голосах многоголосия предполагало или только разновременное (при имитации в унисон), или сочетание временного и вертикального параметров в соотношении голосов кано-

нической формы с каждым из остальных.

Заключительный раздел «Missa brevis» Палестрины – Agnus dei II (Рис. 3) – иллюстрирует аспект симультанной

формы сложного контрапункта с применением техники горизонтально-подвижного преобразования.

Agnus Dei. II. Canon. Symphonizabis.

Рис. 3. Палестрина. Missa brevis. Agnus dei II (такты 1-7)

Сравните, например, соединение пар голосов: кантус 1 – альт, кантус 2 – альт: в первоначальном соединении голосов альт вступает на расстоянии полутора тактов, от мелодии кантуса, а в производном – на полтакта раньше вступления второго кантуса ($Ih=-0,5$).

В другой мессе Палестрины «Repleatur os meum» явление симультанной формы сложного контрапункта ещё более изощренное и разнообразное благодаря

системе уменьшения вертикального интервала имитации в двухголосном стержневом каноне (от октавы до унисона) и временного (от восьми бревисов до одного). Например, в каноне в квинту (раздел Et in terra pax, Рис. 4) между тенором и меццо-сопрано с расстоянием пять бревисов (это два с половиной такта в размере 4/2) все остальные голоса дают одновременно первоначальное и производное соединения к пропосте и респосте.

Gloria in excelsis Deo.

Рис. 4. Палестрина. Месса «Repleatur os meum». Раздел из второй части мессы Gloria (Et in terra pax, такты 1-7).

Сравните, например, здесь пары голосов: альт – тенор, альт – меццо-сопрано): первоначальное соединение – альт по отношению к тенору находится на расстоянии четырех тактов с интервальным соотношением в нижнюю кварту; производное соединение – альт дает $I_{II}=-2,5$ такта, $I_{IV}=-4$ (благодаря перемещению тенора на квинту вверх).

Аналогичным методом можно вычислить и вертикально-горизонтальные отношения между другими парами голосов (кантус–тенор и кантус–меццо-сопрано, бас–тенор и бас–меццо-сопрано). То есть данные комбинации относятся к вдвойне-подвижному контрапункту, достаточно сложному по технике написания, учитывая нормы строгого письма. Такие числовые (математиче-

ские) манипуляции позволяют музыковедам утвердиться во мнении о, безусловно, высоком профессиональном мастерстве данного или других композиторов эпохи Возрождения, а также помогают выявить отдельные стилистические особенности авторов, прибегающих к излюбленным показателям или формам применения сложного контрапункта.

Рассмотренные здесь лишь некоторые аспекты занимательных сторон изучения роли математики в музыкальном контрапункте могут быть дополнены и другими многочисленными примерами. В этом и состоит ценность подмеченных моментов обнаружения строго рационального (математического) зерна в высокохудожественных образцах музыкального искусства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адриан Пети Коклико *Compendium musices* (1552) / Публикация, перевод, исследование и комментарии Н. И. Тарасевича. Редактор Е. М. Шабшаевич. М.: Московская консерватория, 2007. 484 с.
2. Иванова Е.В. Умозрительные аспекты в искусстве контрапункта (к вопросу о методах преподавания) // *Наукосфера. Сетевое издание. Научный журнал*. Ноябрь, 2023. №11(1). С. 10-15.
3. Ключев А.С. Музыка. Философия. Синергетика. СПб.: Астерион, 2012. 200 с.
4. Поспелова Р.Л. Трактаты о музыке Иоанна Тинкториса. Московская гос. консерватория им. П. И. Чайковского, Каф. теории музыки. М.: Московская консерватория, 2009. 711 с.
5. Философия и музыка / Сост. Н.А.Горбачев. Саратов: СГУ, 1975. 100 с.
6. Музыкальная эстетика западноевропейского средневековья и Возрождения / Под ред. В. П. Шестакова. М., 2022. 688 с.
7. Gerbert M. *Scriptores ecclesiastici de musica sacra potissimum*, t. 3, Sankt Blasien, 1784., 412 p.
8. Prout E. *Double Counterpoint and Canon*. London: Augener, 1891. XI, 273 p.
9. Reimer E. *Johannes de Garlandia: De mensurabili musica*. Kritische Edition mit Kommentar und Interpretation der Notationslehre. 2 Bde. Wiesbaden: F. Steiner, 1972. 97 p., 81 p.

REFERENCES (TRANSLITERATED)

1. Adrian Peti Kokliko *Compendium musices* (1552) / Publikacija, perevod, issledovanie i komentarii N. I. Tarasevicha. Redaktor E. M. Shabshaevich. M.: Moskovskaja konservatorija, 2007. 484 s.
2. Ivanova E.V. Umozritel'nye aspekty v iskusstve kontrapunkta (k voprosu o metodah prepodavaniya) // *Naukosfera. Setevoe izdanie. Nauchnyj zhurnal. Nojabr'*, 2023. №11(1). S. 10-15.
3. Kljuev A.S. Muzyka. Filosofija. Sinergetika. SPb.: Asterion, 2012. 200 s.
4. Pospelova R.L. Traktaty o muzyke Ioanna Tinktorisa. Moskovskaja gos. konservatorija im. P. I. Chajkovskogo, Kaf. teorii muzyki. M.: Moskovskaja konservatorija, 2009. 711 s.
5. Filosofija i muzyka / Sost. N.A.Gorbachev. Saratov: SGU, 1975. 100 s.
6. Muzykal'naja jestetika zapadnoevropejskogo srednevekov'ja i Vozrozhdenija / Pod red. V. P. Shestakova. M., 2022. 688 s.
7. Gerbert M. *Scriptores ecclesiastici de musica sacra potissimum*, t. 3, Sankt Blasien, 1784., 412 p.
8. Prout E. *Double Counterpoint and Canon*. London: Augener, 1891. XI, 273 r.

9. Reimer E. Johannes de Garlandia: De mensurabili musica. Kritische Edition mit Kommentar und Interpretation der Notationslehre. 2 Bde. Wiesbaden: F. Steiner, 1972. 97 r., 81 r.